

Feuille de TD n° 1: Nombres complexes

**Exercice 1** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

a)  $i^5$    b)  $(1 + 3i)^3$    c)  $\frac{1 + 2i}{1 - 3i}$    d)  $\sum_{k=0}^8 (3i)^k$ .

**Exercice 2** Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

a) 3   b)  $i$    c)  $3 + 3i$    d)  $\frac{i}{1 + i}$    e)  $(\frac{i}{1 + i})^5$ .

**Exercice 3** Écrire sous formes trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants:

a)  $-3 + 3i$    b)  $1 - i\sqrt{3}$    c)  $4i$    d) 5   e)  $3 + i\sqrt{3}$   
f)  $\frac{i}{1 + i}$    g)  $(\frac{i}{1 + i})^4$    h)  $1 + \cos\theta + i\sin\theta$ .

**Exercice 4** On considère les deux nombres complexes  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

i) Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme algébrique.

ii) Déterminer les écritures sous formes algébrique, trigonométrique et exponentielle de  $z_1 z_2$ .

iii) En déduire la valeur exacte de  $\cos\frac{\pi}{12}$  et  $\sin\frac{\pi}{12}$ .

**Exercice 5** Exprimer  $\cos 3\theta$  et  $\sin 3\theta$  sous forme de polynômes en  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$ . Même question pour  $\cos 4\theta$  et  $\sin 4\theta$ .

**Exercice 6** Linéariser  $\cos^2\theta$ ,  $\sin^2\theta$ ,  $\cos^5\theta$  et  $\sin^5\theta$ .

**Exercice 7** Calculer les racines quatrièmes complexes de  $-4$  et placer ces racines dans le plan complexe.

**Exercice 8** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes:

a)  $z^5 = 2$    b)  $z^3 = i$    c)  $z^2 - 4z + 5 = 0$    d)  $z^2 + 8i = |z|^2 - 2$    e)  $z^3 = |z|$    f)  $(z - i)^4 = z^4$ .

**Exercice 9** Démontrer que pour tous nombres complexes  $z_1, z_2$ , on a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(Indication: utiliser la relation  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ). Interpréter géométriquement.

**Exercice 10** Déterminer l'ensemble des points d'affixe  $z$  vérifiant:

a)  $|z| = 3$    b)  $z - \bar{z} = 4$    c)  $\frac{z - 1}{z + 1} = 2$    d)  $\frac{1 - z}{i - z}$  est réel

e)  $|z - 1| = |z + 1|$