Géométrie en petite dimension feuille TD n°3

Exercice 1. On se donne les deux repères cartésiens $\mathcal{R} = ((0,0);((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)))$ et $\mathcal{R}' = ((0,1,1);((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ de $\mathbf{R}^3$. Calculer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}'$ du plan affine d'équation $5x - 2y + z + 4 = 0$ dans $\mathcal{R}$.

Exercice 2. On suppose que $\mathbf{R}^3$ est muni du repère cartésien usuel, dans lequel seront exprimés les hypothèses et solutions de cet exercice. Soit H le plan affine de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x &= \lambda - 2\beta \\ y &= 8 - \lambda \\ z &= 5 + \lambda + 3\beta \end{cases}$$

Donner un point et la direction de H. Donner un système d'équations cartésiennes définissant H dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 3. On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni du repère cartésien usuel, dans lequel seront exprimés les hypothèses et solutions de cet exercice. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui a un point m de coordoonnées (x,y,z) associe le point $f(m)$ de coordonnées (x',y',z') telles que :

$$\begin{cases} x' &= 3x + y + 1 \\ y' &= 3x + y + 2 \\ z' &= 3x + y + 3 \end{cases}$$

1. Donner l'image par f de l'origine du repère. Donner dans la base canonique la matrice de la partie linéaire $L(f)$ de f. Calculer le noyau et son image de $L(f)$ en en précisant les dimensions.
2. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$. Quelle est l'image par f de la droite affine $M + vect((1,-3,0))$
3. Quelle est l'image par f du plan affine $M + vect((1,-3,1),(4,5,6))$?
4. Quelle est l'image de $\mathbb{R}^3$ par f ?

Exercice 4. On se place dans le plan affine $\mathbb{R}^2$. Soit $\delta := (5,4) + vect((1,2))$.

1. Donner une équation cartésienne de δ dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une équation de δ dans les coordonnées associées au repère $(O,(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})) = ((1,1);((2,3),(4,5)))$.

Exercice 5. *(Barycentre)* Soit E un espace affine réel. Soient $(P_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de points de E et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de réels telle que $\sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0$. On rappelle qu'un point G de E est dit barycentre des points pondérés (P_i, α_i) si $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{P_iG} = 0$.

1. Montrer que, sous les hypothèses indiquées, le point G existe.
2. Montrer l'unicité du barycentre G.
3. Que se passe-t-il si $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$?
4. Montrer l'associativité du barycentre : si G_1 est le barycentre de $(P_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq k}$, G_2 est le barycentre de $(Q_i, \beta_i)_{1\leq i\leq j}$ et G est le barycentre de
$$((P_1, \alpha_1), \cdots, (P_k, \alpha_k), (Q1, \beta_1), \cdots (Q_j, \beta_j)),$$
alors G est aussi le barycentre de $((G_1, \sum_{i=1}^k \alpha_i), (G_2, \sum_{i=1}^j \beta_i))$.
5. Montrer que tout sous-espace affine F de E est "stable par barycentre" : Pour toute famille de points pondérés $\mathcal{F} := (P_i, \alpha_i)_i$ de F, le barycentre de $\mathcal{F}$ est élément de F.
6. Montrer que toute partie de E stable par barycentre est un sous-espace affine de E.

Exercice 6. Soient A, B et C trois points distincts du plan affine réel $\mathbb{R}^2$. On rappelle que la médiane du triangle ABC issue de A est la droite qui passe par A et le milieu M de BC. Les deux autres médianes sont définies de même.

1. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$,$(B, 1)$ et $(C, 1)$, montrer que les médianes de ABC sont concourantes en G.
2. Quelle est la position de G sur le segment $[MA]$?