

DM à rendre la semaine du 7/11/2016

### EXERCICE I

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $Z_1 = 1 + i, Z_2 = 3i, Z_3 = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} + 1)$ . Le triangle  $ABC$  est-il équilatéral ?

### EXERCICE II

En admettant que  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , déterminer en fonction de  $k \in \mathbb{R}^*$  les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(kx)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan(kx) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(kx)}{x}.$$

### EXERCICE III

Soit  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ ax^2 + 2x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer, s'ils existent, les  $a \in \mathbb{R}$  pour que  $f$  soit continue.
2. Déterminer, s'ils existent, les  $a \in \mathbb{R}$  pour que  $f$  soit dérivable.

### EXERCICE IV

Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z \neq 1$  tels que

$$-i \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}.$$

Proposer une interprétation géométrique.

### EXERCICE V

Montrer par un contre-exemple que l'affirmation suivante est fausse :

Si  $f$  n'est pas bornée alors  $f$  possède une limite en  $+\infty$ .