

Feuille de TD n°4: Fonctions usuelles

**Exercice 1** 1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes:

$$5^x = 15625 \quad 10^x = 2 \quad e^{x^2} = \frac{1}{9} \quad (\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$$

2. Simplifier les expressions suivantes:  $e^{2\ln(x)}$   $e^{-3\ln(\frac{1}{x})}$   $e^{x\ln(3)}$ .

**Exercice 2** 1. Montrer que  $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Étudier la fonction  $f(x) = \ln(1 + x^2)$  et tracer son graphe.

3. Montrer que  $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$  pour tout  $x \geq 0$ .

4. Montrer que si  $0 < x < y$  alors  $x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ . Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque et donner son expression.

**Exercice 4** Étudier les fonctions suivantes:  $f(x) = e^x - 2^x$ ,  $g(x) = xe^x$ ,  $h(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

**Exercice 5** 1. Simplifier  $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{4}))$ ,  $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{4}))$ ,  $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4}))$ .

2. simplifier  $\cos^2(\frac{1}{2}\arccos(x))$  et  $\sin^2(\frac{1}{2}\arccos(x))$ .

3. Calculer  $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ .

**Exercice 6** Pour chacune des fonctions suivantes:

$$f(x) = \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}), g(x) = \arctan(\frac{1}{x}), h(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}), k(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x}$$

1. Déterminer l'intervalle de définition. Étudier la continuité sur cet intervalle.

2. Calculer la fonction dérivée.

3. En déduire une expression simplifiée de la fonction.

**Exercice 7** Montrer que  $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 8** Après avoir donné leurs domaines de définition, simplifier les fonctions suivantes:

$$\sin(\arccos(x)), \cos(\arcsin(x)), \sin(\arctan(x))$$

$$\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}), \arctan(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}})$$

**Exercice 9** 1. Montrer que si  $0 < x < 1$  alors  $\arcsin(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

2. Montrer que si  $x > 1$  alors  $\arctan(x) > \frac{x}{1-x^2}$ .

**Exercice 10** Résoudre les équations suivantes:

$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$