RAPPORT SUR LA THÈSE DE GAEL COUSIN

Le résultat le plus marquant de cette thèse est la construction d'un modèle birationnel explicite pour un feuilletage de Hilbert modulaire associé au corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si la théorie prédit l'existence d'un tel modèle, il est en revanche très ardu de le construire explicitement. Jusqu'à présent trois feuilletages de la sorte tous associés à $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ avaient été déterminés par L. G. Mendès et J. V. Pereira dans un très bel article publié à Compositio Math. G. Cousin explicite un nouvel exemple en partant d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI.

Détaillons un peu le problème et la stratégie très originale mise en oeuvre par l'auteur.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ un corps quadratique totalement réel, et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Une surface de Hilbert modulaire est une surface projective lisse obtenue à partir d'un quotient du bidisque $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ par le plongement diagonal de $\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_K)$ (ou plus généralement d'un sous-groupe d'indice fini de celui-ci) dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Plus précisément, ces surfaces sont obtenues en compactifiant et en désingularisant un tel quotient et portent de ce fait des chaînes et des cycles de courbes rationnelles exceptionnelles.

La géométrie de ces surfaces est liée de manière très étroite aux propriétés arithmétiques de $\mathcal{O}_K$. La plupart des exemples de telles surfaces sont de type général mais pour des valeurs particulières de l'entier D, celle-ci peut être birationnelle à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. C'est par exemple le cas pour $D = 3$ ou 5.

Chaque surface de Hilbert modulaire X porte deux feuilletages holomorphes par courbes induits par les feuilletages verticaux et horizontaux sur $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$. Ces feuilletages jouent un rôle spécial dans la théorie des surfaces complexes feuilletées pour plusieurs raisons.

D'une part leur géométrie est très particulière. Parmi les propriétés dont jouissent ces feuilletages le fait de posséder une structure projective (singulière) transverse est particulièrement important. Précisément ceci signifie qu'il existe un fibré en droites $\pi : L \to X$, un feuilletage $\mathcal{F}$ de l'espace total de L transverse à la fibre générique de π (dit de Riccati), et une section (méromophe) σ de L tels que le feuilletage modulaire est donné par $\sigma^*\mathcal{F}$.

D'autre part les feuilletages modulaires font figure d'exceptions dans la classification birationnelle des surfaces feuilletées mises au point par M. Brunella, M. McQuillan et L. G. Mendès. A une telle surface $(X,\mathcal{F})$ on peut associer un fibré en droites complexes dit fibré canonique du feuilletage $K_{\mathcal{F}}$, et la mesure de ses propriétés de positivité donne lieu à deux invariants numériques : la dimension de Kodaira du feuilletage $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) \in \{-\infty,0,1,2\}$ et la dimension numérique $\nu(\mathcal{F}) \in \{-\infty,0,1,2\}$. Par un théorème de M. Brunella et M. McQuillan, les seuls feuilletages où ν diffèrent de kod sont exactement les feuilletages modulaires, et dans ce cas on a $1 = \nu(\mathcal{F}) > \mathrm{kod}(\mathcal{F}) = -\infty$.

Pour trouver des équations explicites de feuilletages modulaires sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, L.G. Mendès et J. Pereira ont utilisé de manière essentielle les travaux de Hirzebruch décrivant la géométrie des chaînes et des cycles de courbes rationnelles de la surface de Hilbert modulaire dans le cas $D = 5$. La position de ces courbes étaient suffisamment spéciales pour contraindre le feuilletage et pouvoir en déterminer des équations.

L'idée de G. Cousin pour trouver d'autres modèles est de nature complètement différente. Elle repose sur le lien entre existence d'une structure transverse projective pour les feuilletages modulaires et le fait que toute solution de l'équation de Painlevé VI permet de construire des feuilletages avec une telle structure. Ce lien semble ténu, mais G. Cousin réussit tout d'abord à justifier des chances de succès de cette stratégie de manière convaincante.

Expliquons celà plus précisément. Toute solution $t \mapsto q(t)$ de l'équation de Painlevé VI détermine une famille à un paramètre de feuilletages $\mathcal{F}_t$ de Riccati au dessus de $\mathbb{P}^1$ avec quatre fibres singulières en $\{0, 1, \infty, t\}$ et dont la monodromie $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty, t\}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est fixée. Si cette solution est paramétrée par une courbe algébrique $\mathcal{C}$, alors G. Cousin montre à la section 2.1 que l'on peut mettre en famille ces feuilletages et obtenir un feuilletage de Riccati $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ transverse aux fibres du fibré en $\mathbb{P}^1$ trivial au dessus de $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$. L'idée est alors de chercher une section adéquate σ de ce fibré pour que $\sigma^*\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ soit modulaire.

Un théorème de F. Touzet indique que lorsque $\sigma^*\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ est modulaire, alors le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ n'est pas obtenu comme tiré en arrière d'un feuilletage de Riccati sur une courbe rationnelle par une application $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Celà donne donc une contrainte sur les solutions de Painlevé VI pour lesquelles existent une section telle que $\sigma^*\mathcal{F}$ est modulaire : il ne faut pas que $\mathcal{F}_t$ soit lui-même obtenu par tiré en arrière sur une courbe rationnelle pour t générique. La liste de toutes les solutions algébriques de l'équation de Painlevé VI a été récemment obtenue par O. Lisovyy et Y. Tykhyy. À la section 2.5, G. Cousin identifie toutes celles pour lesquelles le feuilletage $\mathcal{F}_t$ n'est pas un tiré en arrière d'un feuilletage de Riccati sur une courbe (il en existe 84).

Prenons maintenant une telle solution paramétrée par $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$, et notons $D \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le diviseur des pôles du feuilletage de Riccati $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$. G. Cousin remarque alors que la représentation de monodromie $\pi_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 - D) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est d'image Zariski-dense, et quasi-unipotente à l'infini. On peut donc lui appliquer les résultats de K. Corlette et C. Simpson. On en déduit l'existence d'une application holomorphe $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 - D$ vers un quotient X arithmétique d'un polydisque (un "polydisk Shimura DM stack" dans leur terminologie). Parmi les solutions algébriques de Painlevé VI permises, G. Cousin finalement identifie à la section 2.6 une petite liste d'exemples pour lesquelles X est une surface complexe en calculant le corps des traces des représentations de monodromie correspondante. Pour tous ces exemples, la théorie prédit enfin l'existence d'une section σ adéquate telle que $\sigma^*\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ est modulaire.

Il faut maintenant mettre en oeuvre cette stratégie pour trouver l'équation du feuilletage modulaire tant recherchée, et ceci est tout à fait non trivial, mélangeant aspects théoriques et calculatoires. Ceci est fait en détail au chapitre 4 de sa thèse, partie qui a été soumise sous forme d'article.

G. Cousin part tout d'abord d'une solution de Painlevé VI pour laquelle le corps des traces de sa représentation de monodromie est $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Il en déduit un feuilletage de Riccati au dessus de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. En analysant les singularités de ce feuilletage, il prouve l'existence d'un groupe non trivial de symétries birationnelles du feuilletage, et obtient par passage au quotient un feuilletage de Riccati au dessus $\mathbb{P}^2$. Son équation est explicite quoique compliquée (certains coefficients dépassant le million !). En choisissant une section très simple, il obtient alors par tiré en arrière un feuilletage sur $\mathbb{P}^2$ de degré 3 très simple.

L'auteur s'emploie alors à vérifier que le feuilletage ainsi obtenu est effectivement un feuilletage modulaire. Pour ce faire, il calcule son fibré canonique et la décomposition de Zariski de celui-ci (section 4.5.3), ce qui lui donne la dimension numérique du feuilletage. Le calcul de la dimension de Kodaira est beaucoup plus délicat et ne se fait pas de manière directe : il repose sur la classification des feuilletages de dimension de Kodaira 1 dûe à L.G. Mendès et M. McQuillan ainsi que sur le fait que la monodromie du feuilletage de Riccati associée n'est pas résoluble.

Une fois obtenu ce premier feuilletage modulaire, G. Cousin décrit son feuilletage modulaire dual et donne une involution birationnelle permutant ces deux feuilletages.

A partir de là, il calcule la monodromie de la structure projective transverse et remarque l'existence d'un revêtement de degré 2 de la surface feuilletée qui reste une surface rationnelle munie d'un feuilletage modulaire. La compréhension de la monodromie permet enfin à l'auteur de conclure que ce feuilletage est précisément celui associé au quotient du bidisque par le plongement diagonal de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Cette thèse est tout à fait remarquable.

Elle s'articule autour de deux objets mathématiques fascinants, l'équation de Painlevé VI et les surfaces de Hilbert modulaires, qui se situent au carrefour naturel de plusieurs théories mathématiques (théorie algébrique des nombres, géométrie algébrique, théorie des singularités complexes, équations différentielles holomorphes, correspondance de Riemann-Hilbert, variété de caractères, etc.). Dans cette thèse, on retrouve cette même variété de thèmes abordés.

En cherchant à construire un modèle explicite, G. Cousin a été naturellement amené à faire des calculs complexes qui illustrent de manière non triviale des résultats de nature très diverses :

- la détermination de toutes les solutions algébriques de Painlevé VI dont le feuilletage de Riccati n'est pas obtenu par tiré en arrière sur une courbe (section 2.5) repose sur la classification des solutions algébriques de O. Lisovyy et Y. Tykhyy ;
- le calcul complet de la monodromie du feuilletage modulaire à la section 4.8 fournit des exemples de factorisation à la Corlette - Simpson ;
- le calcul de la décomposition de Zariski du feuilletage modulaire à la section 4.5 illustre la classification des surfaces feuilletées de M. McQuillan.

En exhibant un feuilletage modulaire à partir d'une solution explicite de l'équation de Painlevé VI, l'auteur de cette thèse a donc réussi un véritable tour de force.

Il ne fait aucun doute que cette thèse peut être soutenue en l'état.

Charles Favre
Directeur de recherche
CMLS
École Polytechnique.

Rapport sur la Thèse
Connections méromorphes plates sur le plan projectif complexe
presentée par Gaël COUSIN

L'un des plus beaux chapitres de la mathématique du XIXème siècle est le début de l'étude des *courbes modulaires*. Étant donné un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$, le quotient du demi-plan supérieur $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}$ sous l'action de Γ est une courbe complexe (non-compacte) dont les bouts peuvent se compactifier pour obtenir une courbe complexe compacte. La théorie cherche à comprendre ces courbes. Elle est au carrefour de l'algèbre, l'arithmétique, la topologie et l'analyse complexe. Par exemple, KLEIN prouve que le quotient de $\mathbf{H}$ par le sous-groupe $\Gamma(7)$ (le sous-groupe du groupe modulaire composé par des élements congruents à l'indentité mod 7) est une courbe de genre 3 avec 24 bouts. Une fois que l'on compactifie ces bouts, la courbe est isomorphe à celle donnée dans le plan projectif par l'équation $x^3y+y^3z+z^3x$. Cette formule n'est pas anecdotique. Si son existence est une conséquence du Théorème d'Uniformisation (qui ne sera prouvé que plus tard et que les travaux de KLEIN et d'autres présagent), la formule explicite témoigne d'une connaissance intime de la surface modulaire et des objets que lui sont naturellement associés.

Dans le monde des surfaces complexes, les analogues directes des courbes modulaires sont les surfaces modulaires de HILBERT. Étant donné un entier d sans facteurs carrés, on consière le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, ainsi que l'anneau O_K de ses entiers algébriques. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,O_K)$ se plonge comme un réseau dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$. Ces réseaux agissent naturellement sur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ et ont pour quotient une surface complexe qui, après compactification et désingularisation (ce qui est, déjà, une partie significative de la théorie), est une surface algébrique dite *surface de* HILBERT *modulaire*, notée $\mathscr{H}_{\sqrt{d}}$. La place que ces surfaces occupent dans la classification de ENRIQUES-KODAIRA est bien comprise et on sait, par exemple, que la surface est rationnelle dans un nombre fini de cas, dont $d = 2,3,5,6$ et 7. Tout ceci est le travail que beaucoup de mathématiciens ont accompli pendant presque un siècle.

La théorie de ces surfaces garde les aspects de la théorie des courbes modulaires, auxquels viennent s'ajouter les difficultés qu'entraîne le passage du monde des courbes au monde des surfaces. De nouveaux objets apparaissent dont, notamment, les *feuilletages modulaires*. Les surfaces modulaires de HILBERT sont naturellement munies de deux feuilletages transverses et transversalement projectifs (provenant de la structure du produit de $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$), dits *feuilletages modulaires*, ainsi que d'une involution qui les échange. La Théorie de Classification de Feuilletages de BRUNELLA, MENDES et MCQUILLAN place les feuilletages modulaires dans une catégorie toute particulière, puisque, dans leur ensemble, ils sont caracterisés par le fait que leur dimension de KODAIRA est $-\infty$ et que leur dimension de KODAIRA numérique est 1 (le cas, dans la Classification, où « l'abondance » n'a pas lieu).

Les premiers exemples de modèles birationnels explicites de feuilletages modulaires semblent avoir été donnés par KOBAYASHI et NARUKI (dans les cas $\mathscr{H}_{\sqrt{2}}$ et $\mathscr{H}_{\sqrt{5}}$). Une étude plus approfondie du cas $\mathscr{H}_{\sqrt{5}}$, à la lumière de la Classification de Feuilletages, est due à MENDES et PEREIRA.

L'un des principaux résultats de la Thèse de M. COUSIN est l'obtention d'une formule explicite pour les feuilletages modulaires de la surface rationnelle $\mathscr{H}_{\sqrt{3}}$:

Théorème. *Le feuilletage de* $\mathbf{CP}^2$ *donné, dans une carte affine, par le noyau de la forme*

$$-12y(1+3y)(3x-y)dx+[(10-18x)y^2-9x(18x-5)y-9x^2(9x-2)]dy,$$

et son image par l'involution birationnelle

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{3y(3y+13)x-y(7y+9)}{(135y+9)x-3y(3y+13)},y\right)$$

sont, après un revêtement double, birationnellement équivalents aux feuilletages modulaires de la surface de HILBERT *modulaire* $\mathscr{H}_{\sqrt{3}}$. *L'involution est la modulaire.*

La preuve peut se résumer ainsi :

- Se donner un feuilletage transversalement projectif particulier, que l'on soupçonne d'être l'un des feuilletages cherchés.
- Prouver que la dimension de KODAIRA numérique de ce feuilletage est égale à 1.
- Prouver que la dimension de KODAIRA n'est pas égale à 1. Ceci garantit la modularité du feuilletage.
- Prouver que ce feuilletage est, à un revêtement fini (explicite) près, le feuilletage modulaire cherché.
- Identifier le deuxième feuilletage et l'involution qui les échange.

L'approche est nouvelle et le Théorème courageux. Rien dans la démarche ne garantit que l'on puisse effectivement trouver des formules explicites. Rien ne garantit non plus que, au cas où on les trouverait, les formules explicites obtenues soient suffisamment simples pour pouvoir en extraire des données. C'est l'aboutissement du calcul qui donne sens à chacune de ces étapes.

Décrivons brièvement les éléments de la preuve.

Les feuilletages modulaires sont, naturellement, transversalement projectifs. D'après la formulation de PEREIRA et LORAY, ces feuilletages sont donnés par un fibré en droites projectives au-dessus d'une surface (muni d'un feuilletage de RICCATI) et par une section de ce fibré transverse au feuilletage. Le feuilletage de RICCATI est construit à partir d'une solution algébrique de l'équation de PAINLEVÉ VI, choisie en fonction de ses propriétés arithmétiques. Au-delà de sa simplicité, ce qui guide le choix de la section n'est pas clair, mas celui-ci s'avère être le bon.

Le calcul de la dimension de KODAIRA numérique est fait directement, en considérant un modèle réduit du feuilletage et en calculant le diviseur canonique et ses propriétés numériques (ceci utilise fortement la théorie de BRUNELLA et MCQUILLAN, que l'on voit apparaître d'une façon presque algorithmique). Ceci donne aussi les courbes algébriques invariantes. Une fois établi le fait que la dimension de KODAIRA numérique est égale à 1, il faut écarter les cas où la dimension de KODAIRA serait égale à 1. D'après la Classification, il faut prouver, d'une part, que l'holonomie est suffisamment riche (pas virtuellement abélienne), et d'autre, que le feuilletage n'est pas un feuilletage de RICCATI.

Pour prouver que l'holonomie est riche, l'auteur utilise un algorithme de type VAN-KAMPEN et la connaissance des courbes algébriques invariantes, afin de trouver exactement la représentation d'holonomie (ce qui impliquera que l'holonomie est celle d'un feuilletage de $\mathscr{H}_{\sqrt{3}}$). Pour prouver que le feuilletage n'est pas de RICCATI, il utilise les propriétés de la solution de PAINLEVÉ VI choisie.

Donc, d'après la Classification, le feuilletage est véritablement un feuilletage modulaire et, d'après le calcul de l'holonomie, celui de $\mathscr{H}_{\sqrt{3}}$. L'autre feuilletage et l'involution s'obtiennent à partir de la configuration des courbes algébriques invariantes.

Dans la Thèse, l'auteur se penche aussi sur d'autres questions liées à la représentation de groupes fondamentaux de complémentaires de courbes dans les surfaces, liées à la formulation de LORAY et PEREIRA des feuilletages transversalement projectifs :

Théorème. *Soit $\mathscr{R}$ un feuilletage de* RICCATI *à pôles logarithmiques au-dessus de* $\mathbf{CP}^2$ *et D, son lieu polaire. Si la monodromie de $\mathscr{R}$ n'est pas virtuellement abélienne et si D a un point de multiplicité* $m \geq \deg(D) - 2$ *alors $\mathscr{R}$ est pull-back d'un feuilletage de* RICCATI *au-dessus d'une courbe.*

Les résultats présentés par M. COUSIN sont nouveaux et intéressants. Ils s'inscrivent pleinement dans la mathématique d'aujourd'hui.

Les recherches qui occupent cette Thèse sont loin d'être épuisées. L'auteur a déjà, devant lui, les problèmes de recherche que son travail suscite.

Pour arriver aux résultats de cette Thèse, l'auteur a dû s'approprier un bagage mathématique très considérable, que j'espère avoir illustré, et qu'il connaît avec la profondeur et la familiarité que les preuves de ses Théorèmes le requièrent. Cette connaissance est aussi indispensable pour interagir avec les logiciels de calcul formel utilisés par l'auteur dans certains calculs.

Je conseille vivement que la soutenance de la Thèse de M. COUSIN ait lieu.

Adolfo GUILLOT
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Mexique